ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE, DE TECHNIQUES AVANCÉES
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS, DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE
DE LA MÉTALLURGIE ET DE L'INDUSTRIE DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (OPTION T.A.)

∴

CONCOURS D'ADMISSION 1983

• • •

MATHÉMATIQUES

2ème ÉPREUVE

OPTION P'

(Durée 4 heures)

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie : MATHS II -- P'

CET ÉNONCÉ COMPORTE 5 PAGES

NOTATIONS ET RAPPELS

. $\mathbb{R}$ désigne le corps des réels ; $\mathbb{R}_+$, l'intervalle $[0, +\infty[$; I, un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ (borné ou non).

. La fonction exponentielle sera notée indifféremment : $t \longmapsto e^t$ ou $t \longmapsto \exp(t)$.

. $\mathbb{R}^n$ sera identifié à l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ des matrices réelles à n lignes et une colonne. Cet espace vectoriel sera muni de la norme $|.|$:

$$\forall\, x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \qquad |x| = \sum_{i=1}^{n} |x_i| .$$

n est un entier strictement supérieur à 1.

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre n ; par convention :

$$\forall\, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) , \qquad A^0 = I_n , \qquad I_n : \text{matrice identité d'ordre n.}$$

. Soit E un espace vectoriel réel de dimension p ; l'ensemble $\mathcal{L}(E)$ des applications linéaires de E dans E est un espace vectoriel réel de dimension p^2 : il sera supposé muni de l'une de ses normes, équivalentes l'une à l'autre. Soit $t \longmapsto M(t)$ une application continue de I dans $\mathcal{L}(E)$; soit $t \longmapsto c(t)$ une application continue de I dans E ; pour tout $(t_0, x_0) \in I \times E$, il existe une et une seule application $t \longmapsto x(t)$ de I dans E dérivable vérifiant les relations (*) :

$$(*) \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\, x(t) = M(t).x(t) + c(t) , \\ x(t_0) = x_0 . \end{cases}$$

M(t).x(t) désigne l'image de x(t) par M(t).

Le problème comporte trois parties ; la deuxième question de la 3ème partie peut être traitée indépendamment du reste.

Résultat préliminaire

Soient u et v deux fonctions continues positives définies sur $\mathbb{R}_+$ et k un réel strictement positif tels que :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+ , \qquad u(t) \leq k + \int_0^t u(s)\, v(s)\, ds .$$

• • •/• • •

Prouver :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+ \quad , \quad u(t) \leq k \exp\left(\int_0^t v(s)\, ds \right).$$

Indication : considérer l'inégalité :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+ \qquad \frac{u(t)\, v(t)}{k + \int_0^t u(s)\, v(s)\, ds} \leq v(t).$$

PARTIE I

1°) Montrer que l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}_+$, $A \longrightarrow ||A||$ définie par :

$$||A|| = \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{n} |a_{i,j}| \quad \text{où} \quad A = (a_{i,j})$$

est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; montrer :

$$\forall\ (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad , \quad ||A.B|| \leq ||A||.\ ||B|| \ ,$$

$$\forall\ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad , \quad \forall\, x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad , \quad |A.x| \leq ||A||.|x|.$$

2°) Soit $t \longrightarrow A(t)$ une application de I dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; $A(t) = (a_{i,j}(t))$;

Donner une condition nécessaire et suffisante sur les fonctions $a_{i,j}$ de I dans $\mathbb{R}$, pour que l'application $t \longrightarrow A(t)$ soit continue. Même question pour que l'application soit dérivable.

Montrer que, si la fonction $t \longrightarrow A(t)$ de I dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dérivable, il vient :

$$\forall\ B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \qquad \frac{d}{dt}\,(A(t).B) = \frac{d}{dt}\,A(t).B \ ,$$

$$\forall\, x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \qquad \frac{d}{dt}\,(A(t).x) = \frac{d}{dt}\,A(t).x.$$

3°) Soit $t \longrightarrow x(t)$ une application continue de I dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$; supposons : $0 \in I$; soit $y(t)$ l'élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ défini par :

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n(t) \end{pmatrix} \quad \text{avec : } y_i(t) = \int_0^t x_i(s)\, ds \ ; \ x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

On écrira : $y(t) = \int_0^t x(s)\, ds.$

Montrer que l'application $t \longrightarrow y(t)$ de I dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est dérivable et de dérivée $x(t)$; montrer l'inégalité :

$$\forall\, t \in I \cap \mathbb{R}_+ \ , \qquad |y(t)| \leq \int_0^t |x(s)|\, ds.$$

.../...

4°) Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donnée ; soit S_p , p = 0, 1, 2, ... la suite des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définies par la relation :

$$S_p = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} A^k .$$

Montrer que cette suite S_p est une suite de Cauchy dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Sa limite, élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, est désignée par exp(A).

. Donner l'expression de exp(D) lorsque D est une matrice diagonale.

. Donner un majorant de $||\exp(A)||$ en fonction de $||A||$.

. Montrer que, si deux matrices A et B sont semblables, les matrices exp(A) et exp(B) le sont aussi.

Il sera admis dans la suite que, si deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ commutent (A.B = B.A), il vient :

$$\exp(A + B) = \exp(A) . \exp(B).$$

5°) Après avoir précisé exp(0), montrer que toute matrice exp(A) ($A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) est régulière ; préciser $(\exp(A))^{-1}$.

Montrer que l'application $t \longrightarrow \exp(tA)$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, est dérivable et préciser sa dérivée en considérant la matrice :

$$\frac{1}{h} (\exp ((t + h)A) - \exp(tA)) - A.\exp(tA) ,$$

où h est un réel.

PARTIE II

Dans toute cette partie, A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1°) a - Déterminer la solution $t \longrightarrow S(t)$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$(M) \begin{cases} \frac{d}{dt} S(t) = A.S(t) \\ S(0) = I_n \end{cases}$$

Indication : Utiliser le résultat de la question I - 5°)

b - Donner une condition nécessaire et suffisante sur la matrice A, supposée diagonalisable, pour que la solution $t \longrightarrow S(t)$ vérifie l'une des propriétés :

$$(\alpha) \quad \lim_{t \to +\infty} ||S(t)|| = 0 \quad , \qquad (\beta) \quad \lim_{t \to +\infty} ||S(t)|| = +\infty .$$

Montrer que, lorsque la condition (α) est remplie, il existe des constantes a et b (a > 0, b > 0) telles que :

$$(C) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}_+ \qquad ||S(t)|| \leq a\ e^{-bt} .$$

Est-il nécesseire que la matrice A soit diagonalisable pour que cette condition (C) puisse être réalisée ?

Considérer la matrice $A_o = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; calculer A_o^p puis $\exp(tA_o)$.

2°) Montrer que la solution $t \longrightarrow x(t)$, de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ des équations :

$$(I) \qquad \begin{cases} \frac{d}{dt} x(t) = A.x(t) \\ x(0) = x_o \end{cases} \quad ; \qquad x_o \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) .$$

peut s'exprimer à l'aide de la solution $t \longrightarrow S(t)$ des équations (M). Donner une condition suffisante sur A ou sur S(t) pour que, quel que soit x_o , la solution x(t) tende vers 0, lorsque t croît indéfiniment.

.../...

3°) Soit $t \longmapsto c(t)$ une application continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$;

Montrer que la fonction $t \longmapsto y(t)$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+ \quad y(t) = \exp(tA).y_o + \int_0^t \exp((t-s)A).c(s)\,ds$$

est solution des équations :

$$(II) \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\, y(t) = A.y(t) + c(t)\ , \\ y(0) = y_o\ ; \qquad y_o \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\ . \end{cases}$$

4°) Soit $t \longmapsto B(t)$, une application continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: montrer qu'il existe une seule application $t \longmapsto z(t)$ dérivable de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifiant les équations (III)

$$(III) \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\, z(t) = (A + B(t)).z(t) \\ z(0) = z_o \qquad ;\ z_o \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}). \end{cases}$$

a - En utilisant la question II - 3°), montrer que la fonction $t \longmapsto z(t)$ vérifie une équation dans laquelle figure une intégrale.

b - En supposant que la matrice A est telle que la matrice S(t) associée vérifie la condition (C), et que la matrice B(t) est telle que l'intégrale de la fonction $t \longmapsto \|B(t)\|$ est convergente sur $[0, +\infty[$, montrer que la solution $t \longmapsto z(t)$, des équations (III), tend vers 0 lorsque t croît indéfiniment.

PARTIE III

Soit le système différentiel :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\, x(t) = -a\, \dfrac{t^2}{1+t^2}\, x(t) + y(t)\ , \\ \dfrac{d}{dt}\, y(t) = -a\, y(t)\ , \\ x(0) = x_o \quad ,\quad y(0) = y_o. \end{cases}$$

$t \longmapsto x(t)$ et $t \longmapsto y(t)$ sont deux fonctions inconnues dérivables de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$; a est un réel strictement positif ; x_o et y_o sont deux réels donnés.

1°) Montrer, en utilisant les résultats établis précédemment que la solution $t \longmapsto (x(t), y(t))$ de ce système tend vers 0 lorsque t croît indéfiniment.

2°) Déterminer la solution de ce système et vérifier le résultat annoncé.